Universidad Simón Bolivar.
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

Primer Parcial MA-1112
Abril-Julio 2005
Tipo A
Duración: 1 hora 45 min.

Justifique claramente todas sus respuestas. Soluciones:

1. (4 pts. c/u) Resuelva las siguientes integrales:

a)

$$\int_4^9 \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^3}{\sqrt{x}}dx$$

Solución: Hacemos la sustitución $y=\sqrt{x}-2$, $dy=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$. Entonces

$$\int_4^9 \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^3}{\sqrt{x}}dx = 2\int_0^1 y^3 dy = 2\left[\frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}$$

b)

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{2-\operatorname{sen}^2(x)}dx$$

Solución: Recordamos primero que $\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1$. Hacemos la sustitución $u=\cos(x)$, $du=-\operatorname{sen}(x)\,dx$. Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{2-\operatorname{sen}^2(x)}dx &= \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos^2(x)}dx = -\int \frac{1}{1+u^2}dx \\ &= -\arctan(u)+C = -\arctan(\cos(x))+C\end{aligned}$$

c)

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx \quad \text{con } 0\le x\le a$$

Sugerencia: haga el cambio de variable $x=1/t$.
Solución: Hacemos la sustitución $x=\frac{1}{t}$, $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx &= -\int \frac{\sqrt{a^2-\frac{1}{t^2}}}{\frac{1}{t^4}}\frac{1}{t^2}dt = -\int \frac{t^2\sqrt{a^2t^2-1}}{t}dt \\ &= -\int t\sqrt{a^2t^2-1}.\end{aligned}$$

Hacemos la sustitución $z=a^2t^2-1$, $dz=2a^2tdt$. Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx &= -\frac{1}{2a^2}\int \sqrt{z}dz = -\frac{1}{2a^2}\int z^{\frac{1}{2}}dz = -\frac{1}{2a^2}\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}+C \\ &= -\frac{1}{2a^2}\frac{2}{3}\left(a^2t^2-1\right)^{\frac{3}{2}}+C = -\frac{1}{2a^2}\frac{2}{3}\left(\frac{a^2}{x^2}-1\right)^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

2. (8 pts.) Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son dos antiderivadas de la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$.

   a) Demuestre que $\phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ es una función constante $\forall x \in [a,b]$.
   Prueba: Como $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son dos antiderivadas de la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$, sabemos que

$$\begin{aligned} F_1'(x) &= f(x) \quad \forall x \in [a,b], \text{ y} \\ F_2'(x) &= f(x) \quad \forall x \in [a,b] \end{aligned}$$

   Como resultado $\phi(x) \equiv F_1(x) - F_2(x)$ posee derivada igual a cero en todo en intervalo $[a,b]$ pues $\phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0$. Por lo tanto, ϕ es una función constante en el intervalo $[a,b]$.

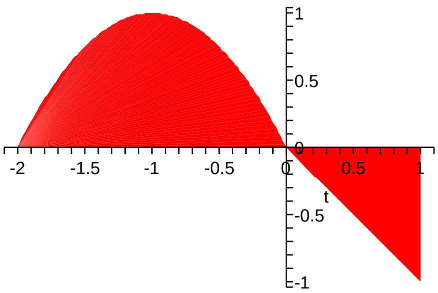
   b) Pruebe que $\phi(x) = \phi(a)$ $\forall x \in [a,b]$.
   Prueba Como ϕ es una función contante $\phi(x) = \phi(y)$ para todo $x, y \in [a,b]$. En particular, $\phi(x) = \phi(a)$ $\forall x \in [a,b]$.

3. (10 pts.) Considere la función

$$f(t) = \begin{cases} g(t) & \text{si } -2 \leq t \leq 0 \\ h(t) & \text{si } 0 < t \leq 1, \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

donde $g(t) = -(t+1)^2 + 1$ y $h(t) = |t-1| - 1$.

   a) Bosqueje el gráfico de f;
   Gráfico:



b) $\int_{-2}^{0} g(t)\,dt$
Solución:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{0} g(t)\,dt &= \int_{-2}^{0} [-(t-1)^2+1]\,dt \\
&= \int_{-2}^{0} (-t^2-2t)\,dt \\
&= \int_{0}^{-2} (t^2+2t)\,dt \\
&= \frac{t^3}{3} + t^2|_0^{-2} \\
&= -\frac{8}{3} + 4 \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

c) $\int_{0}^{1} h(t)\,dt$
Solución:

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{1} h(t)\,dt &= \int_{0}^{1} (|t-1|-1)\,dt \\
&= \int_{0}^{1} (-(t-1)-1)\,dt \\
&= \int_{1}^{0} t\,dt \\
&= \frac{t^2}{2}|_1^0 \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

d) Hallar el valor del área de la región limitada por f y el eje x.
Solución:

$$A(R) = \int_{-2}^{0} g(t)\,dt - \int_{0}^{1} h(t)\,dt = \frac{4}{3} - \frac{-1}{2} = \frac{11}{6}$$